

УДК 004.942 : 519.876.5

В. А. Федорчук^{*}, канд. техн. наук,**О. А. Дячук**^{**}, канд. техн. наук^{*}Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ,^{**}ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ

ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто процес перетворення математичних моделей динамічних систем, заданих рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: динамічна система, математична модель, перетворення, еквівалентність, апроксимація.

Вступ. Необхідність побудови систем керування складними динамічними процесами призводить до швидкого ускладнення їх математичних моделей. Однак, при розв'язуванні задач аналізу, синтезу та керування, для опису поведінки систем в багатьох випадках виникає необхідність у використанні саме спрощених математичних моделей. Це обумовлює актуальність задачі еквівалентування (спрощення, апроксимації), яка полягає у заміні початкової математичної моделі системи на іншу спрощену модель без істотної втрати точності [1, 2, 3, 4].

У процесі спрощення необхідно задати клас апроксимуючих систем (у вигляді математичного опису, що містить невідомі функціональні параметри), критерій близькості початкової та еквівалентної систем і відрізок часу $[t_0, T]$, на якому здійснюються спрощення. В якості апроксимуючої математичної моделі використовується інтегральна модель при відповідних обмеженнях, які накладаються на її коефіцієнти, вільний член та індекс r :

$$\begin{aligned} \bar{a}_k(t)\bar{y}^{(r)}(t) + \int_{t_0}^t \bar{K}_r(t, \tau)\bar{y}^{(r)}(\tau)d\tau = \\ = \bar{b}_k(t)x^{(r)}(t) + \int_{t_0}^t \bar{L}_r(t, \tau)x^{(r)}(\tau)d\tau + \bar{f}_r(t, t_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут і надалі ризика над функціями означатиме, що вони належать еквівалентній моделі системи.

За критерій якості апроксимації будемо використовувати близькість реакцій початкової та спрощеної моделей при довільних початкових умовах і вхідних сигналах, що задовольняють умови існування та єдиності розв'язків обох рівнянь.

Спрощення інтегральних рівнянь. Запис рівнянь керованих систем у вигляді, що не містить похідних вхідних та вихідних сигналів, дозволяє істотно підвищити точність при розв'язуванні задач управління у тих випадках, коли інформація про впливи та відповідні реакції системи отримана експериментально, наприклад, в задачах ідентифікації, статистичного аналізу та синтезу тощо. У зазначених умовах природно будувати методику апроксимації саме для моделей, що не вимагають проведення операції диференціювання функцій, отриманих на основі експериментальних даних.

Тому, будемо вважати, що модель системи описується звичайним інтегральним рівнянням

$$\begin{aligned} a_k(t)y^{(r)}(t) + \int_{t_0}^t K_r(t, \tau)y^{(r)}(\tau)d\tau = \\ = b_k(t)x^{(r)}(t) + \int_{t_0}^t L_r(t, \tau)x^{(r)}(\tau)d\tau + f_r(t, t_0), \end{aligned} \quad (2)$$

а апроксимуюче рівняння має вигляд (1) при $r = 0$. Для зручності запису індекс «0» у позначеннях коефіцієнтів рівняння (1) будемо опустити скрізь, де це не призведе до непорозумінь.

Ядра інтегральних операторів виразу (1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \bar{K}_k(t, \tau) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(t-\tau)^s}{s!} \bar{c}_s(\tau), \\ \bar{L}_k(t, \tau) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(t-\tau)^s}{s!} \bar{d}_s(\tau). \end{cases} \quad (3)$$

При спрощенні моделі (3) можна окремо апроксимувати її праву частину і ядро $K_k(t, \tau)$, керуючись вимогою, щоб точність апроксимації була максимально можливою. В процесі еквівалентування звичайного рівняння потрібно знайти функції $\bar{a}_k(t)$, $\bar{b}_k(t)$, $\bar{f}(t, t_0)$, $\{\bar{c}_s(\tau)\}$, $\{\bar{d}_s(\tau)\}$. Тому у рівнянні (1) приймемо $\bar{a}_k(t) = a_k(t)$, $\bar{b}_k(t) = b_k(t)$, $\bar{f}_k(t, t_0) = f_k(t, t_0)$. Особливо важливим є строге виконання останньої рівності, оскільки при цьому забезпечується незмінність початкових умов при еквівалентуванні. Очевидно, що функція $f(t, t_0)$ у загальному випадку не є поліномом степеня $(k-1)$ від аргументу. Тому, вибір вільного члена в (1) за наведеною методикою означає, що в правій частині відповідного диференціального рівняння, яке описує спрощену модель,

з'являється додатковий член $\frac{\partial^k f(t, t_0)}{\partial t^k}$.

Тоді, в загальному випадку, звичайні методи пониження порядку диференціального рівняння дають прийнятні результати лише у

випадку, коли $\frac{\partial^{\bar{k}} f(t, t_0)}{\partial t^{\bar{k}}} = 0$, — тобто модель задовольняє деяким

початковим умовам. При невиконанні цих умов максимальна точність еквівалентування досягається при вказаному вище виборі функцій $\bar{f}(t, t_0)$. Якщо з яких-небудь міркувань уведення додаткового члена в диференціальну модель є небажаним, то варто прийняти і визначити коефіцієнти цього виразу за умови найбільшої близькості функцій $f(t, t_0)$ і $\bar{f}(t, t_0)$. Це відома задача наближення функцій поліномом, розв'язування якої детально розглянуто в роботі [5].

Опишемо методику знаходження коефіцієнтів розвинення (3), вибравши для конкретності задачу побудови ядра $\bar{K}_k(t, \tau)$, шляхом спрощення ядра $K_k(t, \tau)$.

Припустимо, що ядро $K_k(t, \tau)$, як функція на відрізку $[t_0, T]$ належить простору $L_p(t_0, T)$, тобто

$$\int_{t_0}^T \int_{t_0}^t |K_k(t, \tau)|^p d\tau dt < \infty.$$

Тоді природно вимагати, щоб функція $\bar{K}_k(t, \tau)$ була проекцією $K_k(t, \tau)$ на скінченно вимірний простір, утворений в початковому просторі елементами виду (3). Іншими словами, коефіцієнти еквівалентного ядра мають визначатись з умови мінімуму функціонала

$$J_p = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left| K_k(t, \tau) - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(t-\tau)^s}{s!} \bar{c}_s(\tau) \right|^p d\tau dt. \quad (4)$$

Нехай $p = 2$. За цих умов функціонал (4) є квадратичним:

$$J_2 = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t [K(t, \tau) - \bar{K}(t, \tau)]^2 d\tau dt.$$

Після очевидних перетворень отримаємо умови його мінімуму у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-\tau)^s}{s!(s+j+1)} \bar{c}_s(\tau) = \int_{\tau}^T \frac{(t-\tau)^j}{(T-\tau)^{j+1}} K(t, \tau) dt. \quad (5)$$

Зокрема, якщо ядро початкового рівняння має структуру типу (3)

$$K(t, \tau) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(t-\tau)^s}{s!} c_s(\tau), \quad (6)$$

то інтеграл у правій частині виразу (5) може бути обчислений заздалегідь і рівняння для визначення шуканих коефіцієнтів спрощуються:

$$\sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-\tau)^s}{s!(s+j+1)} \bar{c}_s(\tau) = \sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-\tau)^s}{s!(s+j+1)} c_s(\tau), \quad (j = \overline{0, \bar{k}-1}).$$

Відзначимо, що матриця цієї системи є симетричною і невикористовується, тому шуканий розв'язок існує і він єдиний.

У випадку, коли у функціоналі (4) $p \neq 2$, для знаходження невідомих параметрів потрібно скористатись відомими алгоритмами пошуку мінімуму [10].

Зупинимось тепер на проблемі апроксимації ядра за критерієм

$$J = \max_{t \in [\tau, T]} |K(t, \tau) - \bar{K}(t, \tau)|. \quad (7)$$

За формулами (3) можна записати

$$\bar{K}(t, \tau) = \sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(t-\tau)^s}{s!} \bar{c}_s(\tau) = \sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \sum_{j=0}^s \frac{t^j (-\tau)^{s-j}}{s!} C_{s,j} \bar{c}_s(\tau) = \sum_{j=0}^{\bar{k}-1} \bar{E}_j(\tau) t^j, \quad (8)$$

де

$$\bar{E}_j(\tau) = \frac{1}{j!} \sum_{s=0}^{\bar{k}-j-1} \frac{(-\tau)^s}{s!} \bar{c}_{s+j}(\tau), \quad (j = \overline{0, \bar{k}-1}).$$

Таким чином, ми прийшли до задачі побудови для функції $K(t, \tau)$ найкращого наближення поліномом (8) на відрізьку $[\tau, T]$. Не зупиняючись на методах побудови точного розв'язку цієї задачі [8], наведемо наближену формулу для визначення поліному (8), побудовану за методикою, викладеною у роботі [6]:

$$\bar{K}(t, \tau) = \sum_{j=0}^{\bar{k}-1} \bar{E}_j(\tau) t^j = \frac{\beta_0(\tau)}{2} + \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \beta_j(\tau) T_j \left(\frac{2t - T - \tau}{T - \tau} \right), \quad (9)$$

де

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\bar{k}} \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} K(\theta_i, \tau) \cos \frac{(2j+1)j\pi}{2\bar{k}},$$

$$\theta_j = \frac{T+\tau}{2} + \frac{T-\tau}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2\bar{k}}, \quad (j = \overline{0, \bar{k}-1}).$$

Параметри $\{\bar{E}_j(\tau)\}$ визначаються в результаті прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях t у правій і лівій частинах (9). Після цього рекурентним способом знаходяться шукані функціональні параметри

$$\bar{c}_{\bar{k}-1}(\tau) = (\bar{k}-1)! \bar{E}_{\bar{k}-1}(\tau),$$

$$\bar{c}_j(\tau) = j! \bar{E}_j(\tau) - \sum_{s=1}^{\bar{k}-j-1} \frac{(-\tau)^s}{s!} \bar{c}_{s+j}(\tau), \quad (j = \bar{k} - 2, \bar{k} - 3, \dots, 0)$$

та оцінюється похибка апроксимації

$$K(t, \tau) - \bar{K}(t, \tau) = \frac{1}{\bar{k}!} \frac{\partial^{\bar{k}} K(\theta, \tau)}{\partial \theta^{\bar{k}}} \prod_{j=0}^{\bar{k}-1} (t - \theta_j),$$

де точка θ лежить в найменшому інтервалі, що містить всі точки $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{\bar{k}-1}, t$.

Наближення за допомогою стаціонарних моделей. Часто при розв'язуванні практичних задач у процесі еквівалентування необхідно замінювати рівняння зі змінними коефіцієнтами рівнянням із постійними коефіцієнтами. Така необхідність обумовлена тим, що для стаціонарних систем вже розроблено ефективний математичний апарат для розв'язування основних задач керування [11]. Розглянемо спосіб побудови моделі стаціонарної системи

$$\bar{y}(t) + \int_{t_0}^t \bar{K}(t - \tau) \bar{y}(\tau) d\tau = \bar{L}x(t) + \int_{t_0}^t \bar{L}(t - \tau) x(\tau) d\tau + \bar{f}(t, t_0), \quad (10)$$

яка отримується в результаті апроксимації інтегрального рівняння.

Припустимо, що у виразі (1) $k(t) \equiv l$. Тоді, порівнюючи рівняння (1) та (10), отримуємо, що найбільша точність еквівалентування досягається, якщо прийняти $\bar{f}(t, t_0) = f(t, t_0)$.

Із очевидної нерівності

$$\|lx - \bar{L}x\| = \|(l - \bar{L})x\| \leq \|l - \bar{L}\| \|x\|$$

впливає, що коефіцієнт \bar{L} рівняння (10) при довільному вхідному сигналі слід визначати з умови мінімуму функціонала $\|l - \bar{L}\|$. Наприклад, у випадку простору $L_2(t_0, T)$ легко показати, що параметр \bar{L} є середнім значенням $l(t)$ на відрізку $[t_0, T]$:

$$\bar{L} = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T l(t) dt.$$

Розглянемо тепер задачу знаходження ядер рівняння (10), вибравши для конкретності функцію $\bar{K}(t - \tau)$. Використовуючи квадратичний функціонал і змінюючи у ньому змінну та порядок інтегрування, запишемо

$$J_2 = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t [K(t, \tau) - \bar{K}(t - \tau)]^2 d\tau dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T-t_0} \left\{ \int_{t_0}^T [K^2(t, t-u) - 2K(t, t-u)\bar{K}(u) + \bar{K}^2(u)] dt \right\} du. \quad (11)$$

Функція $\bar{K}(u)$ мінімізує функціонал J_2 лише в тому випадку, якщо вона мінімізує вираз у фігурних дужках рівняння (11). Звідси знаходимо

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{T-u-t_0} \int_{u+t_0}^T K(t, t-u) dt, \quad (12)$$

тобто $\bar{K}(u)$ є середнім значенням по t функції $K(t, t-u)$ на відрізку $[u+t_0, T]$.

За допомогою виразу (12) отримано найкращий розв'язок поставленої задачі за критерієм (11). Однак, при цьому інтегральний оператор стаціонарної системи може виявитись занадто складним і незручним для практичного використання. Тому, дуже важливим є визначення стаціонарної еквівалентної системи при обмеженій і заздалегідь заданій складності її інтегральних операторів.

Найбільш цікавим є випадок, коли апроксимуюча інтегральна модель з ядром

$$\bar{K}(t - \tau) = \sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(t - \tau)^s}{s!} \bar{c}_s \quad (13)$$

еквівалентна лінійному диференціальному рівнянню зі сталими коефіцієнтами.

Підставляючи вираз (13) у функціонал (11) і диференціюючи отриманий результат по \bar{c}_j , при $j = 0, \bar{k}-1$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$\sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-t_0)^s \bar{c}_s}{s!(s+j+1)(s+j+2)} = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^j}{(T-t_0)^{j+2}} K(t, \tau) d\tau dt,$$

$$(j = 0, \bar{k}-1). \quad (14)$$

У випадку, коли ядро $K(t, \tau)$ описується формулою (13), вирази (14) суттєво спрощуються:

$$\sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-t_0)^s \bar{c}_s}{s!(s+j+1)(s+j+2)} = \int_{t_0}^T \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(T-\tau)^{s+j+1} c_s(\tau)}{(T-t_0)^{j+2} s!(s+j+1)} d\tau, \\ (j = \overline{0, k-1}). \quad (15)$$

Наведемо ще дві модифікації рівнянь (14). Якщо початкова система стаціонарна, тобто $K(t, \tau) \equiv K(t - \tau)$, то із співвідношення (14) отримаємо

$$\sum_{s=0}^{\bar{k}-1} \frac{(T-t_0)^s \bar{c}_s}{s!(s+j+1)(s+j+2)} = \int_{t_0}^T \frac{(T-u-t_0)}{(T-t_0)^{j+2}} K(u) du, \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Якщо ядро $K(t - \tau)$ має структуру типу (6), при $c_j(\tau) \equiv c_j = \text{const}$ для $j = \overline{0, k-1}$, то після інтегрування права частини виразу (6) набуває вигляду

$$\int_{t_0}^T \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(T-t_0)^{s+j+1} \bar{c}_s d\tau}{(T-t_0)^{j+2} s!(s+j+1)} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(T-t_0)^s c_s}{s!(s+j+1)(s+j+2)}, \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Апроксимацію стаціонарної системи можна здійснювати за критерієм Чебишева

$$J = \max_{t_0 \leq \tau \leq t \leq T} |K(t - \tau) - \bar{K}(t - \tau)|. \quad (16)$$

Тоді наближений розв'язок задачі мінімізації функціоналу (16) в класі функцій (13) виражається такими формулами:

$$\bar{K}(t) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \gamma_j T_j \left(\frac{2t - T - t_0}{T - t_0} \right);$$

$$\gamma_j = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} K(u_i) \cos \frac{(2i+1)j\pi}{2k};$$

$$|K(t) - \bar{K}(t)| \leq \frac{1}{k!} \max_{t \in [t_0, T]} |K^{(\bar{k})}(t)| \prod_{j=0}^{\bar{k}-1} |t - u_j|, \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Чисельні експерименти.

Приклад 1. Припустимо, що вільні коливання нестационарної системи описуються рівнянням [6]

$$\ddot{y}(t) - 2t\dot{y}(t) - 4y(t) = 0.$$

Прийmemo $t_0 = 0, T = 1, y_0 = 0, y_0^{(1)} = 1$ і запишемо еквівалентне інтегральне рівняння

$$\ddot{y}(t) + \int_0^t (4\tau - 6t) \ddot{y}(\tau) d\tau = 6t.$$

Звідси, за відомою методикою, знаходимо $\bar{K}(u) = -1 - 5u$, тобто апроксимуюче диференціальне рівняння стаціонарної системи набуде вигляду

$$\ddot{\bar{y}}(t) - \dot{\bar{y}}(t) - 5\bar{y}(t) = t - 1.$$

На рис. 1 наведено точний розв'язок і розв'язок еквівалентного рівняння. Обидві криві достатньо близькі, не дивлячись на досить грубу апроксимацію і нестійкість як початкового, так і апроксимуючого рівняння [6]. Дане перетворення було чисельно досліджено в середовищі Matlab. Результати показали, що відносна похибка складає $8.7321 \cdot 10^{-3} \%$, абсолютна — $1.2184 \cdot 10^{-3}$.

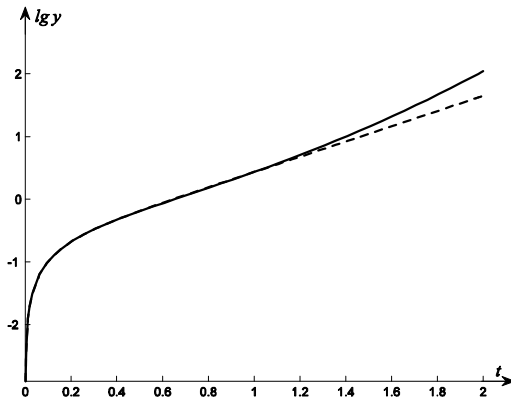


Рис. 1. Вільні коливання в нестійкій нестаціонарній (—) та апроксимуючій стаціонарній (---) системах.

Приклад 2. Нехай модель лінійної системи зі змінними параметрами описується рівнянням [6]

$$\ddot{y}(t) + \frac{2}{t+10} \dot{y}(t) + 0,16y(t) = 0,4x(t), \quad (17)$$

а апроксимуюча система — диференціальним рівнянням першого порядку із сталими коефіцієнтами. Записуючи рівність (17) як інтегральне рівняння відносно $\ddot{y}(t)$ і приймаючи у (16) $\bar{k} = 1$, знаходимо, що $\bar{c}_0 = 0,241$ при $t_0 = 0, T = 1$. В результаті отримаємо апроксимуюче рівняння:

$$\dot{\bar{y}}(t) + 0,241\bar{y}(t) = 0,4 \int_0^t x(\tau) d\tau + (0,241 - 0,16t)y_0 + \\ + [1 + 0,241t - 0,08t^2 - 2\ln(1 + 0,1t)]y_0^{(1)}.$$

Нехай $x(t) = 1(t)$ і $y_0 = y_0^{(1)} = 0$.

На рис. 2 наведено графіки для наближеного розв'язку $\bar{y}(t) = 1,66t + 6,87(e^{-0,241t} - 1)$ і точного розв'язку [6] рівняння (17) $y(t) = 2,5(t+10)^{-1}(t+10-10\cos 0,4t - 2,5\sin 0,4t)$. Обидві криві близькі на відрізку $[0, 2]$, який удвічі більший інтервалу еквівалентування. Обчислення в середовищі Matlab показали, що відносна похибка складає 2.6142 %, абсолютна – $4.2702 \cdot 10^{-3}$.

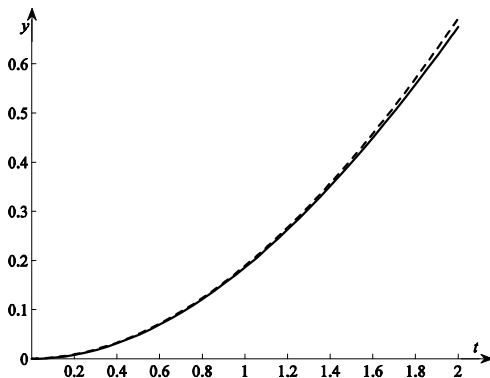


Рис. 2. Реакції на одиничний стрибок нестационарної системи другого порядку (—) та еквівалентної стаціонарній системі першого порядку (---)

Розроблена методика легко поширюється на випадок, коли коефіцієнти спрощеного рівняння частково задані, наприклад, із міркувань ідентичності стаціонарних режимів тощо. При цьому, як показує приклад, точність апроксимацій суттєво підвищується, якщо для наближення обох ядер $K(t, \tau)$ і $L(t, \tau)$ використовуються алгоритми однакової структури з одним і тим же значенням параметра \bar{k} .

Висновки. Розглянутий метод еквівалентного перетворення дозволяє відносно легко проводити спрощення математичних моделей. В межах дослідження на модельних прикладах з'ясовано, що метод дає стійкі та достатньо точні результати, що дозволяє отримувати математичні моделі, які є ефективними при розв'язуванні різноманітних задач динаміки в плані витрат машинного часу, об'єму обчислень та простоти реалізації.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — С. 19—32.
2. Федорчук В.А. Про один метод побудови інтегральних динамічних моделей керованих систем / В.А. Федорчук, О.А. Дячук, О.В. Козак // 36. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. — К., 2006. — Вип. 37. — С. 130—137.
3. Дячук О.А. Про один метод перетворення моделі динамічного об'єкту / О.А. Дячук, Є.Ю. Карпенко, О.В. Козак, С.М. Одокієнко // Електроніка та системи управління. — К. : Національний авіаційний університет, 2007. — № 1 (11). — С. 194—199.
4. Дячук А.А. Аппроксимационные алгоритмы понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта / А.А. Дячук // Электронное моделирование. — 2007. — 29, № 2. — С. 39—47.
5. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функции / В.Л. Гончаров. — М. : Гостехтеоретиздат, 1954. — 328 с.
6. Колев Л.В. О некоторых вопросах аппроксимации линейных динамических систем / Л.В.Колев, А.В. Крумов. — Автоматика и телемеханика, 1973. — №6. — С. 16—23.
7. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — М. : Мир. — 1969. — 448 с.
8. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1975, 304 с.
9. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1966. — 512 с.
10. Полак Э. Численные методы оптимизации / Э. Полак — М. : Мир, 1974. — 376 с.
11. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовника. — М. : Машиностроение. Кн. 1. — 1967. — 768 с.

Process of transformation of mathematical models of the dynamic systems presented by the equations with variable factors is considered.

Key words: *dynamic system, mathematical model, transformation, equivalence, approximation.*

Отримано: 24.11.2009